Физический факультет
Московского
государственного университета
имени М.В.Ломоносова

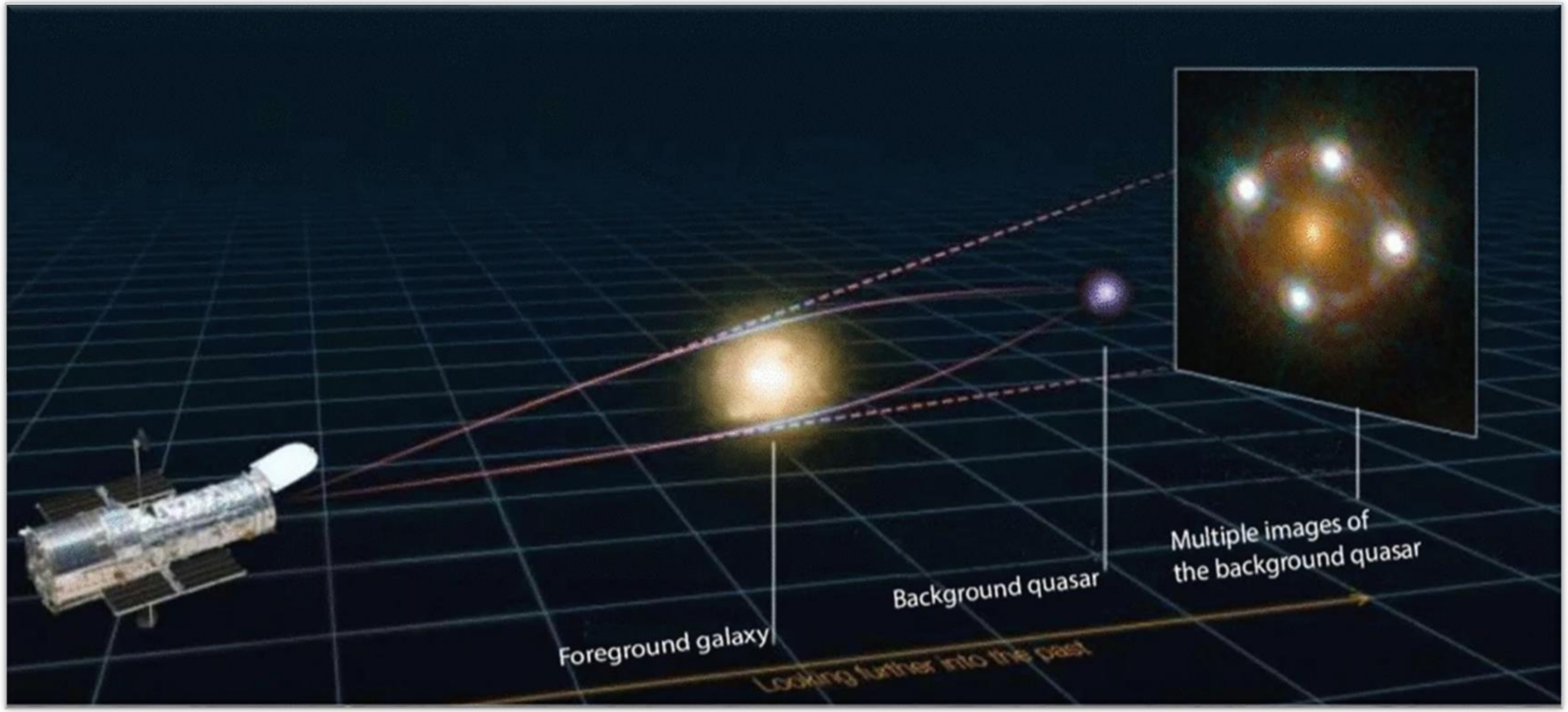
Астрофизические способы решения Хаббловского кризиса

Выполнила:
Студентка 214 группы
Мизиряева Мария Андреевна
Научный Руководитель:
член корр. РАН,
доктор физ.-мат. наук
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Постановка задачи

- С помощью оценки астрометрической погрешности наложить ограничения на параметры переменных линзированных объектов и телескопов, которые используются для получения значения постоянной Хаббла с заданной точностью при помощи космографии временных задержек.

Космография временных задержек при сильном гравитационном линзировании



Формула гравитационной линзы

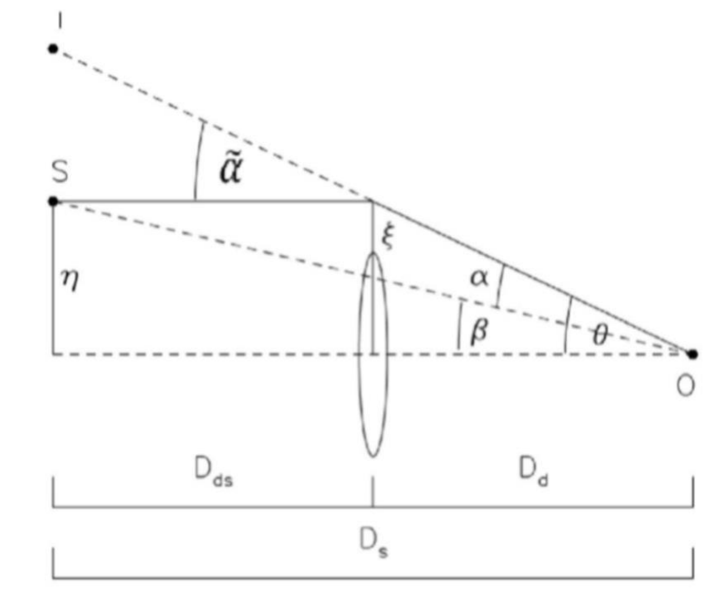


Рис. 1: Геометрия тонкой линзы

Плотность тонкой линзы, спроецированная на её плоскость:

$$\Sigma = \int \rho(\vec{\xi}, x)\, dx$$

Угол отклонения луча света:

$$\vec{\alpha} = \frac{4G}{c} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')\Sigma(\vec{\xi}')}{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')^2} d^2\xi'$$

Угол между линиями, направленными на источник и его изображение:

$$\vec{\alpha} = \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\tilde{\alpha}}$$

Уравнение гравитационной линзы:

$$\boxed{\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}\left(\vec{\theta}\right)}$$

Временные задержки

Скалярный потенциал:

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{D_{ds}}{D_d D_s}\frac{2}{c^2}\int \Phi(\xi(\vec{\theta}), x)\, dx,$$

$$\vec{\nabla}_\theta \psi = D_d \vec{\nabla}_\xi \psi = \frac{D_{ds}}{D_s}\frac{2}{c^2}\int \vec{\nabla}_\perp \psi\, \Phi\, dx = \vec{\alpha}.$$

Принцип Ферма:

$$\vec{\nabla}_\theta \tau(\vec{\theta}) = 0$$

$$(\theta - \beta) - \alpha = (\theta - \beta) - \vec{\nabla}_\theta \psi = 0$$

$$\vec{\nabla}_\theta \left(\frac{1}{2}(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \psi(\vec{\theta})\right) = 0.$$

Временная задержка:

$$\tau(\vec{\theta}) = \frac{1+z_d}{c}\frac{D_d D_{ds}}{D_S}\left(\frac{1}{2}(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \psi(\vec{\theta})\right) = \frac{D_{\Delta t}}{c}\Phi(\theta, \beta)$$

$$\boxed{\Delta \tau_{AB} = \frac{D_{\Delta t}}{c}\Delta\Phi_{AB}}$$

Переход к космологическим параметрам

Метрика Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - a^2\,(t)\,(d\chi^2\; + f_k^2\,(\chi)\,(d\vartheta^2\; + sin^2\,\vartheta\; d\varphi^2))$$

Сопутствующее угловое расстояние:

$$f_k(\chi) = \begin{cases} K^{\frac{1}{2}}\, sin(K^{\frac{1}{2}}\,\chi)\,, & K > 0 \\ \chi\,, & K = 0 \\ (-K)^{-\frac{1}{2}}\, sinh((-K)^{\frac{1}{2}}\,\chi)\,, & K < 0. \end{cases}$$

$K = -\Omega_k\, \frac{{H_0}^2}{c^2}$ - пространственная кривизна

Угловое расстояние:

$$D_A(z_1\,, z_2) = \frac{1}{1 + z_2}\, f_k\,(\chi\,(z_1\,, z_2)).$$

В ΛCDM:

$$\chi\,(z_1\,, z_2) = \frac{c}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} dz'(\Omega_m(1 + z') + \Omega_k\,(1 + z')^2 + \Omega_\Lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

Методы определения расстояния

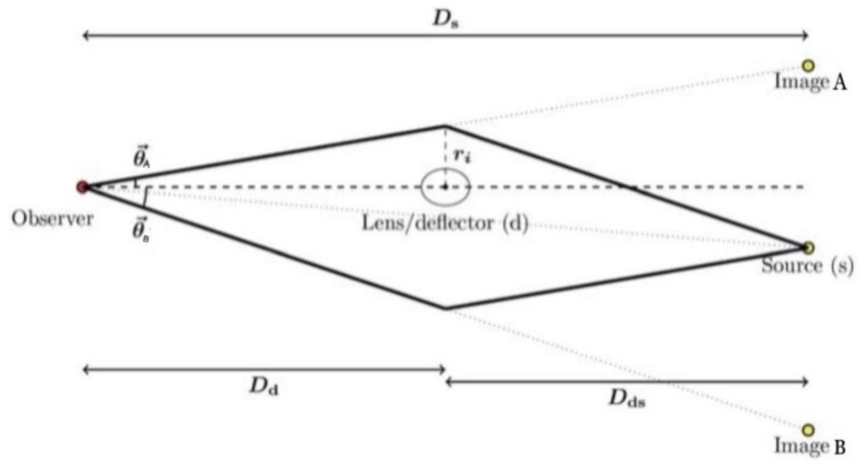


Рис. 2: Схема гравитационной линзы

Расстояние светимости: $D_L = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi F}}$

Угловое расстояние: $D = \dfrac{p}{\theta}$

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2},$$

$$\sigma^2 = \frac{(\theta_A + \theta_B)c^2}{8\pi} \frac{D_s}{D_{ds}}$$

$$\Delta\tau = D_{\Delta t} \frac{({\theta_B}^2 - {\theta_A}^2)}{2c}$$

$$\boxed{D_d = \frac{c^2 \Delta\tau}{4\pi\sigma^2(1 + z_d)\theta_{AB}},}$$

Оценка астрометрической погрешности

$$\frac{\delta H_0}{H_0} = \frac{\delta \Delta \tau}{\Delta \tau} \qquad \frac{\delta H_0}{H_0} = \frac{\delta \Delta \phi_{AB}}{\Delta \phi_{AB}}$$

Поправка для относительного потенциала Ферма:

$$\delta \Delta\, \Phi_{AB}(\delta \vec{\theta}_A) \approx \frac{d \Delta \Phi_{AB}}{d \vec{\theta}_{AB}} \delta \vec{\theta}_{AB} = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\theta}_{AB}} + \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}_{AB}} \frac{\partial}{\partial \vec{\beta}}\right) \Delta \phi_{AB}\, \delta \vec{\theta}_{AB} =$$

$$= (\vec{\theta}_A - \vec{\beta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}_A)) + \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}_{AB}} (\vec{\theta}_B - \vec{\theta}_A)) \delta \vec{\theta}_A = (\vec{\theta}_B - \vec{\theta}_A) \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}_{AB}} \delta \vec{\theta}_A$$

$$\boxed{\delta \Delta\, \Phi_{AB}(\delta \vec{\theta}) \approx (\vec{\theta}_B - \vec{\theta}_A) \delta \vec{\beta}}$$

Дисперсия относительного потенциала Ферма:

$$\sigma^2_{\Delta\Phi_{AB}} \approx (\vec{\theta}_B - \vec{\theta}_A)^T \vec{\Sigma}_\beta (\vec{\theta}_B - \vec{\theta}_A)$$

Распространение ковариационной матрицы ошибок в плоскости изображения k к ковариации плоскости источника:

$$\vec{\Sigma}_{\beta,k} = \vec{A}_k^T \vec{\Sigma}_{\theta,k} \vec{A}_k,$$

Гауссово распределением ошибки на неопределённость положения источника в случае нескольких изображений:

$$\boxed{\vec{\Sigma}_\beta = (\sum_k \vec{\Sigma}_{\beta,k}^{-1})^{-1}}$$

Из формул ранее:

$$\frac{\delta H_0}{H_0} \approx \frac{D_{\Delta t}}{c\Delta\tau_{AB}}(\vec{\theta_B} - \vec{\theta_A})\delta\vec{\beta}$$

$$\boxed{\frac{\delta H_0}{H_0} \approx \frac{D_{\Delta t}}{c}\frac{\theta_{AB}}{\Delta\tau_{AB}}\sigma_\beta}$$

Требования для астрометрической погрешности по отношению к погрешности измерения временной задержки:

$$\boxed{\theta_{AB}\,\sigma_\beta \lesssim \sigma_{\Delta\tau_{AB}}\frac{c}{D_{\Delta t}}}$$

$$\sigma_{H_0} \propto \frac{\sigma_\beta}{\theta_{AB}}$$

Астрометрические требования к телескопам и линзированным объектам

Поставим задачу для определения того, нужно ли наблюдать тот или иной линзированный объект для конкретного телескопа, и того, с помощью каких телескопов в общем случае его можно исследовать:

- Вначале нужно определить угловое разделение изображений A и B источника;
- С помощью кампаний мониторинга или теоретических соображений, исходящих из модели линзы, нужно получить значение относительной временной задержки с погрешностью;
- С помощью методов, описанных ранее необходимо определить угловые расстояния. Для этого, исходя из наблюдений, определяется дисперсия скоростей и используется полученное ранее значение углового расстояния между изображениями;
- Далее определяется по спектру красное смещение линзы и определяется расстояние временной задержки;
- После этого необходимо проверить соотношение для погрешностей , используя имеющуюся у данного телескопа погрешность. Либо подобрать её для общего случая так, чтобы требование выше выполнялось;
- Следует вычислить соотношение погрешности вычисления постоянной Хаббла к ней самой и сравнить полученное значение с необходимой точностью измерения. Последняя должна быть больше. В общем случае следует подобрать погрешность для случая, когда полученная величина нестрого меньше заданной точности, и посмотреть, соответствует ли это значение какому-нибудь из имеющихся телескопов.

Примеры

Пример	θ_{AB} $(arcsec)$	$\Delta\tau(d)$	$\sigma_{\Delta\tau}(d)$	$\sigma_{H_0}(\sigma_\beta) \leq \sigma_{H_0}(\sigma_{\Delta\tau})(mas)$	$\sigma_{H_0}(\sigma_\beta) \leq 5\%$ (mas)
1	20	1000	30	18	30
2	3	100	3	12	20
3	2	10	1	6	3
4	1	4	0,25	3	2,4
5	1	1	0,025	0,3	0,6

Таблица 1: Примеры

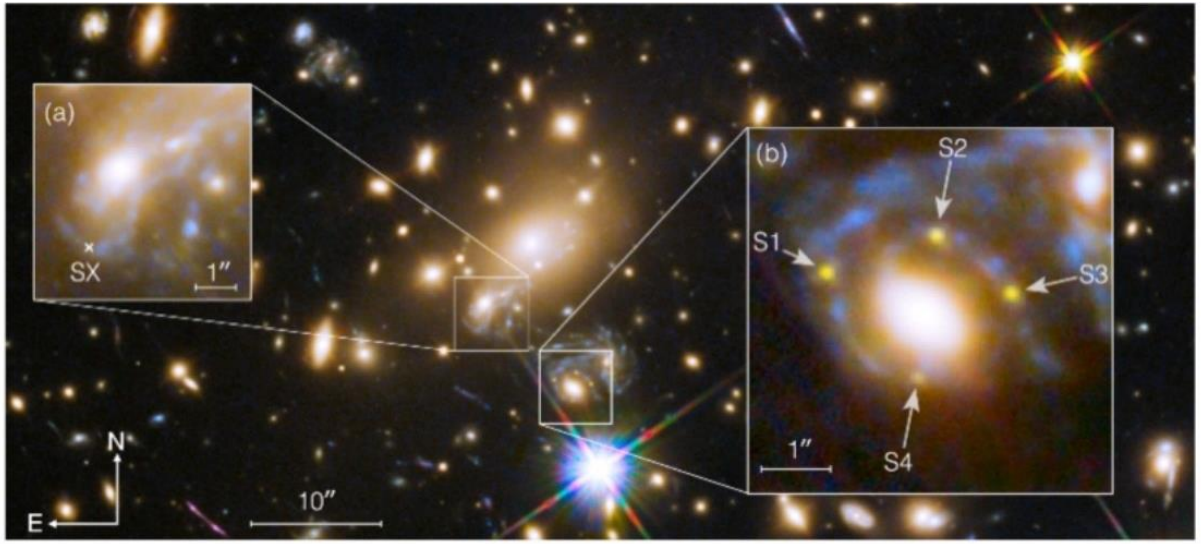
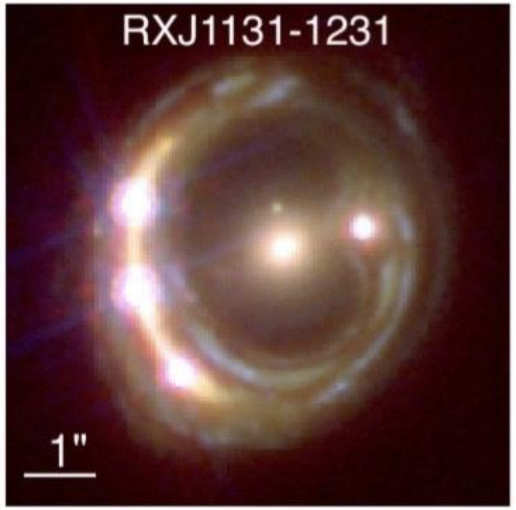
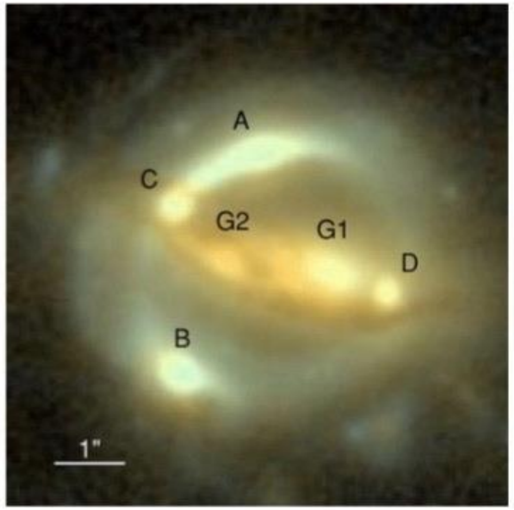


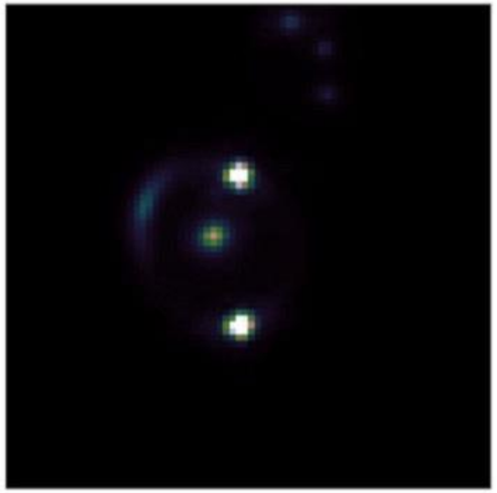
Рис. 3: Сверхновая «Refsdal»



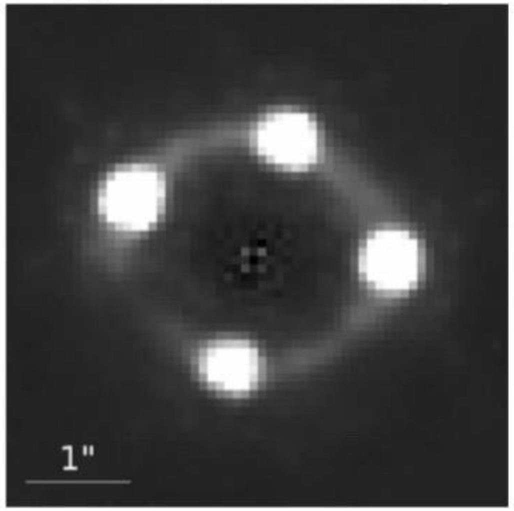
(a) Квазар RXJ1131-1231



(b) Квазар B1608+656

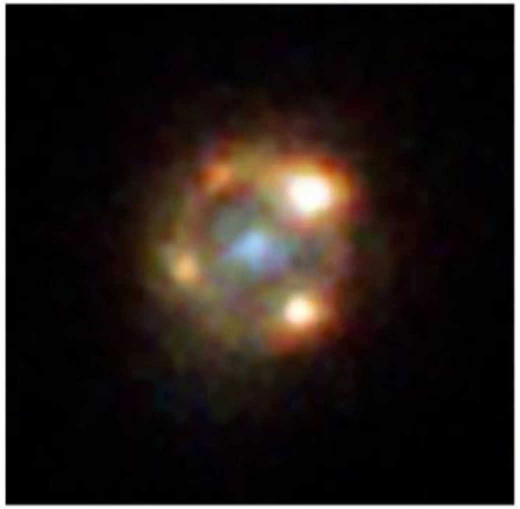


(c) Квазар SDSSJ1206+4332

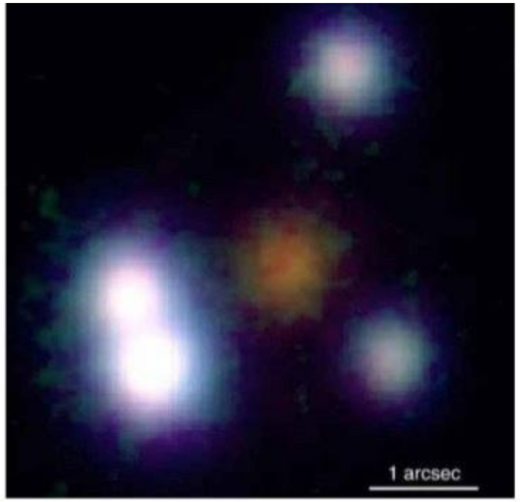


(d) Квазар HE 0435-1223

Рис. 4: К примерам 2 и 3



(a) Сверхновая iPTF16geu



(b) PG1115+080

Рис. 5: К примеру 5

Основные итоги работы

В данной работе:

- приведены основные положения из теории гравитационных линз, которые необходимы для использования метода космографии временных задержек;
- описаны способы получения расстояния во Вселенной, так же требуемые для вычисления постоянной Хаббла;
- произведена оценка погрешности для H, вносимая неточностью астрометрических измерений;
- поставлена задача с астрометрическими требованиями, необходимыми для достижения нужной точности H;
- приведены конкретные примеры, на которых применяется данная задача

Спасибо за внимание!